Aristarco de Samos

Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua

Tradução e edição
Rubens E. G. Machado

Aristarco de Samos

Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua

Tradução e edição

Rubens E. G. Machado

Sumário

Prefácio

Traduções

A presente tradução para o português é infelizmente indireta, tendo sido feita a partir de duas outras traduções, uma francesa e uma inglesa. São elas *Traité d'Aristarque de Samos sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune*, traduzido pelo Comte de Fortia d'Urban (1823); e também a tradução contida em *Aristarchus of Samos: The Ancient Copernicus*, de Sir Thomas Heath (1913).

A fonte última para ambas aquelas traduções vem a ser o *Codex Vaticanus Græcus 204*, que pode ser consultado na *Biblioteca Apostolica Vaticana*. Trata-se de um manuscrito em pergaminho do século x, bastante bem preservado, escrito em grego numa caligrafia compacta e uniforme e com figuras notavelmente claras. O volume, com 412 páginas, é um compêndio de diversos tratados matemáticos e astronômicos de autores como Euclides (*Phænomena*, prolegômenos à *Óptica* e escólios sobre os *Elementos*), Apolônio (*As Cônicas*) e Teodósio (*Sphærica* e *Sobre as noites e os dias*), entre outros. O tratado de Aristarco ocupa 19 páginas, começando

na página 108, de acordo com o índice, que aparenta ser mais recente que o resto do volume; ou 109 v, de acordo com a digitalização da biblioteca.

Para sua tradução ao francês, Fortia d'Urban diz ter consultado também cerca de seis outros manuscritos que se encontravam em Paris na época. Ao que tudo indica, aqueles deveriam ser cópias do Vat. Gr. 204. De fato, Heath menciona que este é tão superior, que os manuscritos posteriores podem ser quase ignorados. Heath portanto baseou sua tradução principalmente em uma reprodução fotográfica do Vat. Gr. 204, que é a fonte mais antiga e mais confiável.

Ambos os tradutores dispunham da edição de John Wallis (1688), que foi o primeiro a publicar o texto grego – proveniente de uma cópia de um dos manuscritos do Vaticano – juntamente com a versão em latim. Esta, por sua vez, era essencialmente uma reimpressão da tradução de Federico Commandino (1572). Segundo o próprio Wallis, a versão latina de Commandino era bastante similar aos manuscritos gregos, fazendo crer que deveriam ter sido derivados da mesma fonte. Wallis também menciona a existência de dois manuscritos na *Bodleian Library*, em Oxford, contendo traduções em árabe. Existe uma tradução para o alemão, de Anton Nokk (1854). Em língua espanhola, há uma edição recente (Massa Esteve, 2007) que aparenta ser a primeira naquele idioma. Com a exceção de breves excertos (Lopes, 2001), não fui capaz de encontrar nenhuma tradução prévia deste tratado em língua portuguesa.

Conteúdo e estilo

O tratado é composto integralmente de demonstrações geométricas, com quase nenhuma discussão adicional. Uma a uma, as proposições são enunciadas e em seguida demonstradas com o auxílio de diagramas. Uma característica que salta aos olhos do leitor moderno é a ausência de trigonometria. Por exemplo, cada vez que se trata de calcular o lado de um dado triângulo, é preciso enunciar proporcionalidades com algum triângulo semelhante, cujas dimensões já tenham sido previamente determinadas. Sem poder aplicar funções trigonométricas em ângulos arbitrários, Aristarco precisa estimar numericamente as proporções que calcula, limitando-as entre valores mínimos e máximos, sempre expressos na forma de razões entre números inteiros. Com isso, determinam-se comprimentos de segmentos de reta em termos de razões com outros segmentos. Todas estas operações são descritas textualmente, sem notação matemática, resultando em um texto rigoroso, mas severamente repetitivo.

A julgar pelo estilo, é de se supor que Fortia d'Urban tenha se permitido mais liberdades na tradução, o que torna seu texto um pouco mais legível, apesar da linguagem inevitavelmente árida do tratado. Em termos de conteúdo, há algumas circunstâncias, por exemplo, em que Heath fala em *círculo*, enquanto Fortia d'Urban não hesita em usar o termo *arco de círculo*. Este tipo de nomenclatura talvez se afaste das expressões originais, mas evita ambigüidade. Em textos astronômicos an-

tigos, quando nos deparamos com expressões do tipo *esfera da Lua* ou *esfera do Sol*, entendemos tratar-se das esferas por onde se moveriam os astros ao redor da Terra. Similarmente, Fortia d'Urban prefere empregar o termo *órbita da Lua*, dependendo do contexto.

Heliocentrismo

Aristarco talvez seja mais célebre por ter proposto o heliocentrismo na antigüidade. Entretanto, não existe menção alguma ao heliocentrismo neste tratado sobre as distâncias – que incidentalmente vem a ser a única obra de Aristarco que sobreviveu. Sabemos de sua proposta heliocêntrica através de um texto de Arquimedes, de quem Aristarco teria sido aproximadamente contemporâneo, juntamente com Eratóstenes. Estes, por sua vez, teriam vivido poucas décadas depois de Euclides (por volta do começo do século III a.C.). De qualquer modo, a noção de heliocentrismo não tem função a desempenhar neste tratado. Para os propósitos das demonstrações geométricas que Aristarco empreende – lidando especificamente com certas configurações de eclipses e fases da Lua – não é estritamente relevante saber se a Terra ou o Sol seriam imóveis. Isto é, as hipóteses e proposições deste tratado envolvem determinadas configurações de luz e sombra na superfície da Lua, que dependem das posições relativas entre Sol, Terra e Lua. Que se imagine um sistema geocêntrico ou heliocêntrico, é indiferente para estes fins. No entanto, está

claro que aqui Aristarco se refere ao movimento da Lua da mesma forma que ao movimento do Sol, ambos se deslocando ao redor da Terra.

Esta edição

As notas de rodapé da presente edição não fazem parte do texto original. Aquelas que se devem a comentários dos outros tradutores estão indicadas. As anotações nas margens também não fazem parte do original e foram incluídas para facilitar a leitura, re-expressando certas passagens em notação moderna ou trazendo alguns valores numéricos. A numeração das proposições difere entre as versões de Heath e Fortia d'Urban. O que seriam a primeira e a segunda proposições neste aparecem naquele sob a mesma proposição; dali em diante a numeração difere por uma unidade. Aqui, mantive a numeração de Heath. As figuras foram refeitas para esta edição, baseadas principalmente nas de Fortia d'Urban. As letras gregas nas figuras foram transliteradas diferentemente por aqueles dois tradutores. Sigo a notação de Fortia d'Urban, mas mantenho apenas caracteres latinos, tanto no texto quanto nas figuras. Tanto Fortia d'Urban quanto Heath concluem a obra com o comentário de Pappus de Alexandria, que também está incluído na presente edição. No Apêndice, apresento um breve resumo dos resultados centrais do tratado usando notação matemática atual.

R.E.G.M.

Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua

Hipóteses

1. A Lua recebe sua luz do Sol.
2. A Terra pode ser considerada um ponto, e é o centro da esfera da Lua.[1]
3. Quando a Lua nos parece *dicótoma* (dividida em duas partes iguais), o grande círculo que separa a parte iluminada da parte escura está na direção de nossos olhos.[2]
4. Quando a Lua nos parece dicótoma, sua separação do Sol é menor que um quadrante por um trigésimo de quadrante.

   $90° - \frac{1}{30} 90° = 87°$

5. A largura da sombra da Terra equivale a duas Luas.
6. A Lua subentende a décima quinta parte de um signo do zodíaco.[3]

   $\frac{1}{15} 30° = 2°$

[1] Ou órbita da Lua.

[2] Isto é, nossa linha de visada é coplanar com este grande círculo.

[3] Na realidade, a Lua subentende aproximadamente meio grau – bem como o Sol. Não se sabe ao certo por que motivos Aristarco teria superestimado esta grandeza, oferecendo nesta obra um valor quatro vezes maior que o correto. Por outro lado, Arquimedes afirma mais tarde que foi Aristarco quem descobriu que o Sol subentende $\frac{1}{720}$ do círculo do zodíaco, ou seja, meio grau.

DMITINDO estas hipóteses, obtemos os seguintes resultados. (i) A distância do Sol à Terra é maior que dezoito – mas menor que vinte – vezes a distância da Lua à Terra; isto decorre da posição da Lua no momento da dicotomia. (ii) O diâmetro do Sol e o diâmetro da Lua têm a mesma razão mencionada anteriormente. (iii) A razão entre o diâmetro do Sol e o diâmetro da Terra é maior do que a razão entre 19 e 3, mas menor do que a razão entre 43 e 6; isto decorre da razão deduzida entre as distâncias, da hipótese sobre a sombra, e da hipótese sobre o tamanho angular da Lua.

$\frac{19}{3} = 6.333\ldots$

$\frac{43}{6} = 7.1666\ldots$

Proposição I

Duas esferas iguais podem ser compreendidas por um cilindro; duas esferas distintas podem ser compreendidas por um cone cujo vértice se localiza na direção da esfera menor; e a linha reta que passa pelos centros das esferas é perpendicular a ambos os círculos em que a superfície do cilindro, ou do cone, toca as esferas.

Sejam duas esferas iguais de centros A e B (Fig. 1). Seja AB a linha que une seus centros. Um plano que contenha AB interceptará as esferas em grandes círculos. Sejam estes círculos CDE e FGH. Sejam CAE e FBH diâmetros perpendiculares à linha AB. Trace-se

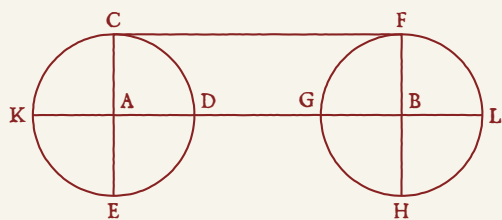



Figura 1

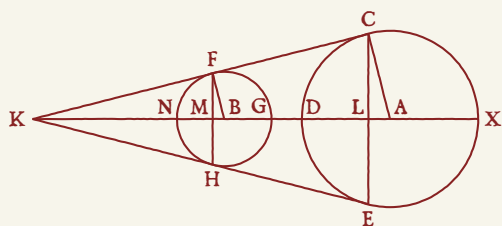



Figura 2

o segmento CF. Assim, já que CA e FB são iguais e paralelos, então CF e AB também são iguais e paralelos. Portanto, CFAB é um paralelogramo e os ângulos em C e em F são retos, de modo que CF toca os círculos CDE e FGH.

Se agora, mantendo AB fixo, o paralelogramo AF e os semi-círculos KCD e GFL executarem uma revolução ao redor de AB até que retornem às posições iniciais, os semi-círculos KCD e GFL terão descrito duas esferas idênticas às originais; e o paralelogramo terá gerado um cilindro, cujas bases serão círculos tendo CE e FH como diâmetros e estando perpendiculares a AB, pois durante todo o movimento CE e FH permaneceram perpendiculares a AB. É evidente que a superfície do cilindro toca as esferas, já que CF toca os semi-círculos KCD e GFL durante todo o movimento.

Consideremos agora duas esferas distintas com centros A e B; seja a maior delas aquela centrada em A (Fig. 2). Afirmo que estas esferas serão compreendidas

por um único cone, cujo vértice encontra-se do lado da esfera menor. Trace-se a linha AB que une os centros das esferas. Um plano por AB corta as esferas em dois círculos; sejam estes círculos CDE e FGH. Certamente o círculo CDE é maior que o FGH; o raio do círculo CDE é maior que o raio do círculo FGH. Assim, é possível encontrar um ponto K (colinear com AB), de tal modo que o raio do círculo CDE esteja para o raio do círculo FG assim como AK está para BK. Seja o ponto K assim definido e trace-se a partir dele a linha KF tangente ao círculo FGH. Trace-se o raio BF; e a partir de A trace-se AC paralelo a BF. Una-se CF. Assim, já que AK está para BK assim como AD está para BN, e já que AD é igual a AC, e BN é igual BF, então AK está para BK assim como AC está para BF. E, como AC é paralelo a BF, então os pontos CFK estão em uma linha reta. O ângulo KFB é reto; portanto KCA também é reto; logo KC toca o círculo CDE. Sejam CL e FM traçados perpendicularmente a AB. Se agora, mantendo KX fixo, os semi-círculos XCD e GFN e os triângulos KCL e KFM executarem uma revolução completa ao redor de KX até que se restaure a posição inicial, então os semi-círculos XCD e GFN terão descrito as esferas, e os triângulos KCL e KFM terão gerado cones cujas bases serão os círculos de diâmetros CE e FH. Estes círculos serão perpendiculares ao eixo KL e terão como centros os pontos L e M. O cone tocará as superfícies de ambas as esferas, já que KFC toca os semi-círculos XCD e GFN durante todo o movimento.

$\frac{FB}{BK} = \frac{CA}{AK}$

Proposição II

Se uma esfera é iluminada por outra esfera maior, a porção iluminada será maior que um hemisfério.

Consideremos pois que a esfera centrada em B seja iluminada por uma esfera maior centrada em A (Fig. 2). Visto que duas esferas distintas podem ser compreendidas por um cone cujo vértice está do lado da esfera menor (Prop. I), construa-se o cone que as compreende. Um plano contendo o eixo corta as esferas e o cone. As seções das esferas são círculos e a seção do cone é um triângulo. Sejam as seções das esferas os círculos CDE e FGH; seja a seção do cone o triângulo CEK. É evidente que a porção da esfera descrita por FGH e tendo por base o círculo de diâmetro FH corresponde à parte iluminada pela parte da esfera descrita por CDE e tendo por base o círculo de diâmetro CE; círculo este que é perpendicular ao eixo AB, pois o arco de circunferência FGH é iluminado pelo arco de circunferência CDE, visto que CF e EH são raios[4] extremos. O centro B da esfera menor encontra-se interno ao arco FGH; por isso, a parte iluminada da esfera é maior que a metade da esfera.

[4] Como bem aponta Fortia d'Urban, *raios* aqui são *raios de luz* (partindo da esfera maior) e não raios de circunferências.

Proposição III

Na Lua, o círculo que separa a parte iluminada da parte escura é mínimo quando o cone que compreende o Sol e a Lua tem seu vértice em nossos olhos.

Seja A o nosso ponto de vista, seja B o centro do Sol e seja C o centro da Lua (Fig. 3) no momento em que o cone que compreende o Sol e a Lua tem seu vértice em nossos olhos. Quando este não for o caso (quando o vértice do cone estiver em outro lugar), o centro de Lua estará em D. É óbvio que os pontos A, B e C são colineares. Um plano contendo a linha AB e o ponto D corta as esferas em círculos e os cones em triângulos. Este plano também corta a esfera[5] na qual o centro da Lua percorre o círculo CD. Tal círculo certamente tem centro em A, pois esta é uma de nossas hipóteses (Hipótese 2). O plano corta o Sol

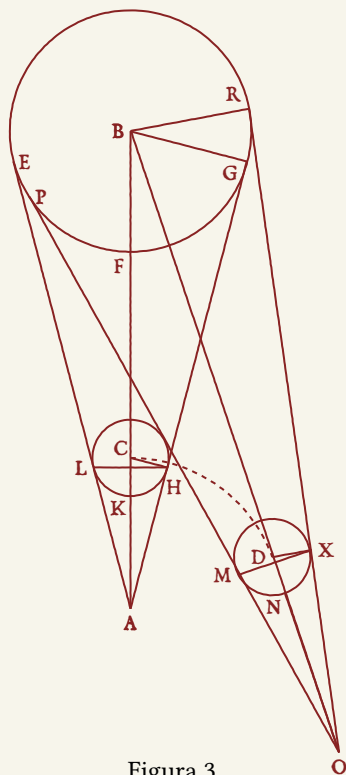



Figura 3

[5] Ou seja, este plano contém a órbita da Lua.

no círculo EFR, e a Lua no círculo KHL quando o cone que compreende o Sol e a Lua tem seu vértice em nossos olhos. Quando este não é o caso, a Lua é cortada no círculo MNX. Os cones são cortados nos segmentos de reta EA, AG, PO e OR, tendo como eixos AB e OB. Deste modo, o raio do círculo EFG está para o raio do círculo HKL assim como o raio do círculo EFG está para o raio do círculo MNX. Mas o raio do círculo EFG está para o raio do círculo HKL assim como AB está para AC; e o raio do círculo EFG está para o raio do círculo MNX assim como OB está para OD. Portanto, AB está para AC assim como OB está para OD. *Dividendo*,[6] obtemos que BC está para AC assim como BD está para OD. *Permutando*,[7] temos que BC está para BD assim como AC está para OD. E o círculo HKL é igual ao círculo MNX; portanto HL é menor que MX.[8] Assim sendo, um círculo ao redor do diâmetro HL, que é perpendicular à linha AB, será menor que o círculo de diâmetro MX, que é perpendicular à linha OB. Mas o círculo cujo diâmetro é LH, sendo este perpendicular a AB, é o círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua, no momento em que o cone que com-

$$\frac{AB}{AC} = \frac{OB}{OD}$$

$$\frac{AB}{AC} - 1 = \frac{OB}{OD} - 1$$

$$\frac{AB - AC}{AC} = \frac{OB - OD}{OD}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{OD}$$

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{OD}$$

[6] Em certas passagens, invoca-se esta nomenclatura para descrever manipulações algébricas. A operação *dividendo*, também chamada de *separando*, consiste da seguinte relação: se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

[7] A operação *permutando* nada mais é do que a relação: se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

[8] Heath nota que este resultado decorre de um lema que consta da *Óptica* de Euclides. Fortia d'Urban discute-o nos escólios.

preende o Sol e a Lua tem seu vértice em nossos olhos. E o círculo cujo diâmetro é MX, sendo este perpendicular a OB, é o círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua, naqueles momentos em que o cone que compreende o Sol e a Lua *não* tem seu vértice em nossos olhos. Desse modo, o círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua é mínimo quando o cone que compreende o Sol e a Lua tem seu vértice em nossos olhos.[9]

Proposição IV

O círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua não difere perceptivelmente de um grande círculo na Lua.

Seja A o nosso ponto de vista e seja B o centro da Lua (Fig. 4). Trace-se o segmento AB. Um plano que contenha AB corta a esfera em um grande círculo. Seja a

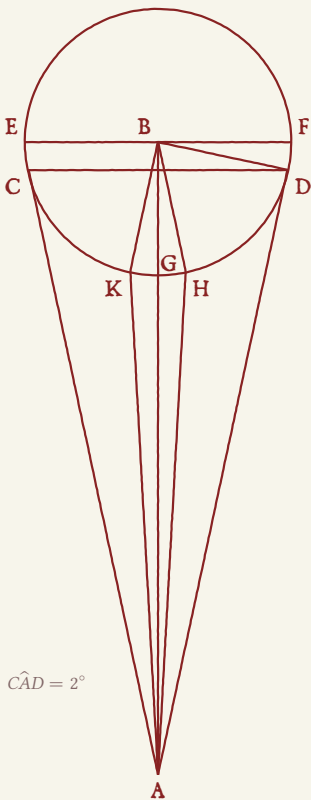
[9] Se a Lua estiver muito afastada do Sol, então a parte iluminada corresponderá a um hemisfério. Neste caso limite, o círculo que separa a parte clara da parte escura é máximo e é um grande círculo (i.e. com diâmetro igual ao diâmetro da Lua). Quanto mais próxima do Sol estiver a Lua, menor será este círculo, em princípio. E a menor distância entre Lua e Sol ocorre quando a Lua se encontra entre o Sol e a Terra (supondo órbitas circulares). Efetivamente, estas diferenças não são relevantes diante das reais dimensões do sistema solar.

$\widehat{CAD} = 2^\circ$

Figura 4

seção da esfera o círculo ECDF e seja a seção do cone dada pelas linhas retas AC, AD e DC. O círculo ao redor do diâmetro CD, que é perpendicular a AB, será o círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua. Afirmo que este círculo não é perceptivelmente diferente de um grande círculo. Seja EF o segmento passando por B e paralelo a CD. Considere os arcos de círculo GK e GH, cada um deles igual à metade do arco DF. Agora, sejam traçados os segmentos KB, BH, KA, AH e BD. Já que, por hipótese, a Lua subentende a décima quinta parte de um signo do zodíaco, este é o valor do ângulo CAD. Mas um quinze avos de um signo corresponde a $\frac{1}{180}$ do círculo completo do zodíaco, de modo que o ângulo CAD vale $\frac{1}{180}$ do círculo, ou seja, $\frac{1}{180}$ de quatro ângulos retos, ou ainda $\frac{1}{45}$ de um ângulo reto. Mas o ângulo BAD corresponde à metade do ângulo CAD; portanto o ângulo BAD vale $\frac{1}{45}$ de meio ângulo reto. Já que o ângulo ADB é reto, o ângulo BAD está para meio ângulo reto em uma razão maior do que a razão

$\widehat{BAD} = 1^\circ$

$\widehat{ADB} = 90^\circ$

de BD para DA.[10] Portanto, BD é menor que $\frac{1}{45}$ de DA, e BG é menor que $\frac{1}{45}$ de BA. *Dividendo*, resulta que BG é menor que $\frac{1}{44}$ de GA. Similarmente, BH também é bem menor que $\frac{1}{44}$ de AH. E BH está para HA em uma razão maior que a razão entre os ângulos BAH e ABH. Portanto, o ângulo BAH é menor que $\frac{1}{44}$ de ABH. Mas KAH é o dobro do ângulo BAH, bem como KBH é o dobro do ângulo ABH. Então o ângulo KAH também é menor que $\frac{1}{44}$ de KBH. Mas o ângulo KBH é igual ao ângulo DBF, que é igual ao ângulo CDB, que é igual ao ângulo BAD. Então o ângulo KAH é menor que $\frac{1}{44}$ do ângulo BAD. Mas o ângulo BAD vale $\frac{1}{45}$ de meio ângulo reto. Conseqüentemente, o ângulo KAH é menor que $\frac{1}{3960}$ de um ângulo reto. Ora, uma extensão vista sob um ângulo tão pequeno é imperceptível aos olhos. O arco HK é igual ao arco DF; portanto, DF é ainda mais imperceptível aos nossos olhos. De fato, se a linha AF for traçada, o ângulo DAF será ainda menor que o ângulo KAH. Por estas razões, D parecerá

$$\frac{BD}{DA} < \frac{1}{45}$$

$$BD = BG$$

$$\frac{DA}{BG} > 45$$

$$\frac{DA}{BG} - 1 > 45 - 1$$

$$\frac{DA - BG}{BG} > 44$$

$$(DA - BG) > 44\,BG$$

mas como $BA > DA$

e $(BA - BG) = GA$,

$$(DA - BG) < GA$$

$$\therefore\ 44\,BG < GA$$

$$\frac{BG}{GA} < \frac{1}{44}$$

$$\frac{1}{44}\ \frac{1}{45}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{3960}$$

$$\frac{1}{3960}\ 90^\circ \approx 1'\,22''$$

[10] Aristarco está usando aqui um resultado geométrico que equivale à seguinte relação para dois ângulos, $\alpha > \beta$, ambos menores que 90°:

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} > \frac{\alpha}{\beta}$$

A razão entre as tangentes é maior que a razão entre os comprimentos dos arcos. No caso, $\alpha = 45^\circ$ e $\beta = B\widehat{A}D = 1^\circ$. Como $\tan B\widehat{A}D = \frac{BD}{DA}$, resulta que

$$B\widehat{A}D > \frac{BD}{DA}\ 45^\circ.$$

coincidir com F. Do mesmo modo, C parecerá coincidir com E. Logo, não há diferença perceptível entre CD e EF. Portanto, o círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua não difere perceptivelmente de um grande círculo na Lua.

Proposição v

Quando a Lua nos parece iluminada pela metade (ou dicótoma), o grande círculo paralelo ao que divide a Lua em duas partes (iluminada e escura) estará na direção de nossos olhos; ou seja, o grande círculo paralelo ao que separa a parte clara da parte escura estará no mesmo plano que nossos olhos.

Já que quando a Lua nos parece dicótoma, o círculo que separa a parte clara da parte escura está na direção de nossos olhos (Hipótese 3), e já que o grande círculo paralelo ao círculo divisório é indistinguível deste, então decorre que, quando a Lua nos parece dicótoma, o grande círculo paralelo ao círculo divisório está na direção de nossos olhos.

Proposição VI

A Lua se move em uma órbita inferior à do Sol; e quando ela se apresenta dicótoma, a separação entre a Lua e o Sol é menor que um quadrante.

Seja A o nosso ponto de vista e seja B o centro do Sol (Fig. 5). Trace-se a linha AB e o trace-se o plano que a contém e que passa pelo centro da Lua quando dicótoma. Este plano cortará em um círculo a esfera na qual se move o centro do Sol.[11] Seja CBD este círculo. Seja traçado o segmento CAD, perpendicular a AB. Assim, o arco de círculo BD corresponde a um quadrante. Afirmo que a Lua se move em uma órbita inferior àquela do Sol. E que, quando dicótoma, a Lua estará separada do Sol por menos de um quadrante. Isto é, seu centro estará entre as linhas BA e AD e a circunferência DEB.

Figura 5

Suponhamos que não fosse este o caso; e que o centro da Lua estivesse em F, na região entre as linhas DA e AL. Trace-se então a linha BF. Assim, BF será o eixo do cone que compreende tanto o Sol quanto a Lua. E BF será perpendicular ao grande círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua. Seja GHK o

[11] Ou seja, o plano contém a órbita do Sol ao redor da Terra.

círculo paralelo ao grande círculo que separa a parte iluminada da parte escura.[12] Então, já que a Lua está dicótoma, o círculo paralelo ao que separa a parte clara da parte escura está no mesmo plano que nossos olhos (Prop. v). Trace-se AF, que é coplanar com o círculo GHK. BF é perpendicular ao círculo GHK e portanto a AF. Logo, BFA é um ângulo reto. Mas ao mesmo tempo o ângulo BAF é obtuso, o que impossível. Conseqüentemente, o ponto F não pode estar na região delimitada pelo ângulo DAL. Afirmo que este ponto também não pode estar sobre a linha AD. Caso pudesse, suponha-o localizado em M e trace a linha BM. Tome-se o grande círculo paralelo ao círculo divisório, centrado em M. É possível demonstrar, como no caso anterior, que o ângulo BMA seria reto. Mas BAM também seria reto, o que é impossível. Portanto, o centro da Lua quanto dicótoma não está sobre AD. Logo, deve estar entre AB e AD.

Novamente, afirmo que este ponto deve ser interno ao arco BD. Caso contrário, suponha-o externo ao arco BD, em N. Sejam traçadas as mesmas construções. É possível demonstrar que o ângulo BNA é reto e que, portanto, BA seria maior que AN. Mas BA é igual a AE, então AE seria maior que AN, o que é impossível. Portanto, o centro da Lua quando dicótoma não pode ser externo à circunferência BED. Similarmente, pode-se demonstrar que tal ponto também não estará

[12] Na realidade, este círculo teria que ser perpendicular ao plano da figura. Por este motivo, Heath desenha círculos pontilhados

localizado sobre a própria circunferência BED. Logo, é interno a ela. Daí resulta que a órbita da Lua é inferior à do Sol; e quando ela se apresenta dicótoma, a separação entre a Lua e o Sol é menor que um quadrante.

Proposição VII

A distância do Sol à Terra é maior que dezoito vezes, mas menor que vinte vezes, a distância da Lua à Terra.

Seja A o centro do Sol e B o centro da Terra (Fig. 6). Trace-se a linha AB. Seja C o centro da Lua quando dicótoma. O plano que contém A, B e C corta a esfera em que se move o centro do Sol, cuja seção é o grande círculo ADE. Trace-se AC e BC. Estenda-se BC até D. Já que o C é o centro da Lua quando dicótoma, então o ângulo ACB é reto. A partir de B, trace-se BE perpendicularmente a BA. Então o arco ED será um trigésimo do arco ADE. Isso decorre da hipótese de que, quando a Lua se mostra dicótoma, o ângulo entre a Lua e o Sol é menor do que um quadrante por um trigésimo de quadrante (Hipótese 4). Então o ângulo EBC vale um trigésimo de

Figura 6

$\widehat{GBE} = \frac{1}{4}\ 90^\circ$

$\widehat{DBE} = \frac{1}{30}\ 90^\circ$

$\frac{\tan \widehat{GBE}}{\tan \widehat{DBE}} > \frac{\widehat{GBE}}{\widehat{DBE}}$

$\frac{GE/BE}{HE/BE} > \frac{\widehat{GBE}}{\widehat{DBE}}$

$\frac{GE}{HE} > \frac{\widehat{GBE}}{\widehat{DBE}}$

$BF^2 = BE^2 + EF^2$

$BF^2 = 2\ BE^2$

$\frac{FG}{GE} > \frac{7}{5}$

$\frac{FG}{GE} + 1 > \frac{7}{5} + 1$

$\frac{FG + GE}{GE} > \frac{12}{5}$

$\frac{FE}{GE} > \frac{12}{5}$

quadrante. Complete-se o paralelogramo AE e trace-se BF. Então o ângulo FBE será metade do ângulo reto. Se a linha BG bissecciona o ângulo FBE, então GBE vale um quarto do ângulo reto. Mas o ângulo DBE é um trigésimo do ângulo reto. Portanto, a razão entre os ângulos GBE e DBE é como a razão entre 15 e 2. Afinal, se o ângulo reto for dividido em 60 partes iguais, o ângulo GBE contém 15 delas e o ângulo DBE contém 2. Como a razão entre GE e HE é maior que a razão entre os ângulos GBE e DBE,[13] então a razão entre GE e HE é maior que a razão entre 15 e 2. Em seguida, já que BE é igual a EF, e já que o ângulo em E é reto, resulta que o quadrado de BF é o dobro do quadrado de BE.[14] Mas o quadrado de FB está para o quadrado de BE assim como o quadrado de FG está para o quadrado de GE. Portanto, o quadrado de FG também é o dobro do quadrado de GE. Ora, 49 é menor que o dobro de 25.[15] Então a razão entre o quadrado de FG e o quadrado de GE é maior que a razão entre 49 e 25. Logo, a razão entre FG e GE é maior que a razão entre 7 e 5. *Componendo*,[16] resulta que FE está para GE em uma razão maior do que a razão entre 12 e 5, ou entre 36 e 15. Mas já provamos que a razão entre GE e EH é maior que a razão entre 15 e 2. Então resulta que a

[13] Novamente usando a relação $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} > \frac{\alpha}{\beta}$.

[14] Teorema de Pitágoras.

[15] Heath nota que Aristarco está se referindo à conhecida aproximação pitagórica $\sqrt{2} \approx \frac{7}{5}$. Esta ótima aproximação é um limite inferior e implica em um erro de apenas 1%.

[16] Este é o nome da seguinte operação: se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

razão entre FE e EH é maior que a razão entre 36 e 2, ou seja 18. Portanto FE é maior que 18 vezes EH. Mas FE é igual a BE. Então BE também é 18 vezes maior que EH. E BH é ainda maior que 18 vezes EH. Mas BH está para HE assim como AB está para BC, pela semelhança de triângulos. Então AB também é maior que 18 vezes BC. AB é a distância do Sol à Terra, enquanto CB é a distância da Lua à Terra. Assim, a distância do Sol à Terra é maior que 18 vezes a distância da Lua à Terra.

$\frac{GE}{EH} > \frac{15}{2}$

$\frac{FE}{EH} > \frac{36}{2}$

Afirmo novamente que a distância do Sol à Terra é também menor que 20 vezes a distância da Lua à Terra. A partir de D, trace-se DK paralelamente a EB. Ao redor do triângulo DKB descreva-se um círculo DKB; DB será seu diâmetro, já que o ângulo em K é reto. Seja BL um dos lados de um hexágono regular inscrito neste círculo. Então, já que o ângulo DBE vale um $\frac{1}{30}$ de um ângulo reto, o ângulo BDK também vale $\frac{1}{30}$ de um ângulo reto. O arco BK vale $\frac{1}{60}$ da circunferência completa. Mas o arco BL é um sexto da circunferência. A razão entre o arco BL e o arco BK é maior que a razão entre os segmentos de reta BL e BK.[17] Portanto, o segmento BL é menor que dez vezes o segmento BK. E BD é o dobro de BL,[18] portanto BD é menor que 20 vezes BK. Mas BD está para BK assim como AB está para BC. Logo, AB também é menor que 20 vezes BC. Como AB

[17] Isto decorre de uma proposição provada por Ptolomeu, que equivale à relação $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$, para ângulos $\beta < \alpha < 90^\circ$.

[18] Um hexágono regular inscrito em uma circunferência tem lados iguais ao raio da circunferência.

é a distância do Sol à Terra e CB é a distância da Lua à Terra, resulta que a distância do Sol à Terra é menor que 20 vezes a distância da Lua à Terra. E é também maior que 18 vezes, conforme demonstrado anteriormente.[19]

$18 < \frac{AB}{BC} < 20$

Proposição VIII

Quando o Sol está totalmente eclipsado, o Sol e a Lua ficam compreendidos por um cone cujo vértice se encontra em nossos olhos.

De fato, se o Sol está eclipsado, é porque a Lua está na sua frente. Então o Sol encontra-se dentro do cone que compreende a Lua e que tem vértice em nossos olhos. Estando dentro de tal cone, o Sol poderia estar contido perfeitamente, poderia extrapolar o cone, ou poderia haver espaço de sobra dentro do cone. Se o Sol extrapolasse o cone, ele não estaria totalmente eclipsado, pois a porção excedente apareceria desobstruída. Se, por outro lado, houvesse sobra de espaço, o Sol permaneceria obscurecido durante o intervalo de tempo necessário para percorrer o excesso. Mas as observações[20] mostram que o Sol é eclipsado totalmente e não permanece eclipsado. Já que o Sol não excede o cone e nem é excedido por ele, então o Sol fica exatamente compreendido pelo cone que compreende a Lua e que tem vértice em nossos olhos.

[19] Note que $\frac{1}{\cos 87^\circ} \approx 19.1$.

[20] Aristarco aparenta ignorar o fenômeno dos eclipses anulares.

Proposição IX

O diâmetro do Sol é maior que dezoito vezes, mas menor que vinte vezes, o diâmetro da Lua.

Seja A o nosso ponto de vista, B o centro do Sol e C o centro da Lua (Fig. 7), quando o cone que compreende o Sol e a Lua tem o vértice em nossos olhos, isto é, quando os pontos A, B e C são colineares. Um plano que passe por ABC cortará as esferas em grandes círculos e o cone em linhas retas. Sejam os círculos FG e KLH, e seja a seção do cone dada por AFH e AGK. Tracem-se os segmentos CG e BK. Assim, BA está para AC assim como BK está para CG. Mas já foi demonstrado que BA é maior que 18 vezes, e menor que 20 vezes AC. Portanto, BK também é maior que 18 vezes, e menor que 20 vezes CG.

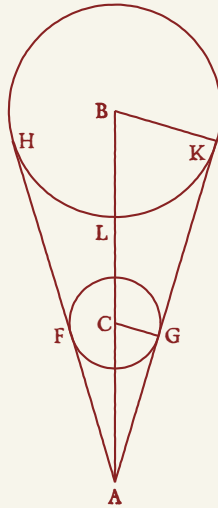



Figura 7

$$\sin C\hat{A}G = \frac{CG}{AC}$$

$$\sin B\hat{A}K = \frac{BK}{BA}$$

$$C\hat{A}G = B\hat{A}K$$

$$\frac{CG}{AC} = \frac{BK}{BA}$$

$$18 < \frac{BA}{AC} < 20$$

$$18 < \frac{BK}{CG} < 20$$

Proposição x

A razão entre o tamanho[21] *do Sol e o tamanho da Lua é maior que a razão entre 5832 e 1, mas menor que a razão entre 8000 e 1.*

A

B

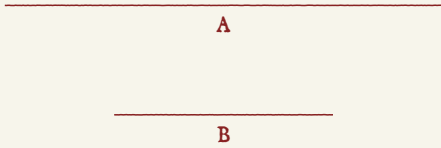



Figura 8

Seja A o diâmetro do Sol e B o diâmetro da Lua (Fig. 8). Então a razão entre A e B é maior que a razão entre 18 e 1, mas menor que a razão entre 20 e 1. Um cubo de lado A é maior que um cubo de lado B por uma razão que é o cubo[22] da razão entre A e B. Da mesma forma, a esfera de diâmetro A está para a esfera de diâmetro B assim como o cubo de A está para o cubo de B. Mas o cubo de A está para o cubo de B em uma razão maior que a razão entre 5832 e 1, e menor que a razão entre 8000 e 1, já que A está para B em um razão maior que a razão entre 18 e 1, mas menor que a razão entre 20 e 1. Desse modo, o Sol está para a Lua em uma razão maior que a razão entre 5832 e 1, mas menor que a razão entre 8000 e 1.

$5832 < \left(\frac{A}{B}\right)^3 < 8000$

[21] Aqui trata-se de calcular os *volumes*.
[22] A terceira potência.

Proposição XI

O diâmetro da Lua é menor que $\frac{2}{45}$, mas maior que $\frac{1}{30}$ da distância entre o centro da Lua e nossos olhos.

Seja A o nosso ponto de vista e B o centro da Lua (Fig. 9) quando o cone que compreende o Sol e a Lua tem seu vértice em nossos olhos. Afirmo que o enunciado desta proposição é válido. Trace-se o segmento AB; o plano que passa por AB corta a esfera em um círculo e o cone em linhas retas. Seja o círculo CED e seja a seção do cone dada pelos segmentos AD e AC. Trace-se o segmento BC e estenda-se esta linha reta até E. Já sabemos pelo que foi demonstrado (Prop. IV) que o ângulo BAC vale $\frac{1}{45}$ de um ângulo reto e que, conseqüentemente, BC é menor que $\frac{1}{45}$ de CA. Portanto BC é ainda menor que $\frac{1}{45}$ de BA. Já que CE é o dobro de BC, então CE é menor que $\frac{2}{45}$ de AB. CE é o diâmetro da Lua, enquanto BA é a distância do centro da Lua até nossos olhos. Portanto, o diâmetro da Lua é menor que $\frac{2}{45}$ da distância entre o centro da Lua e nossos olhos. Afirmo em seguida que CE também é maior que $\frac{1}{30}$ de BA. Tracem-se DE e DC. Seja traçado um círculo CDF, centrado em A e com raio AC. No cír-

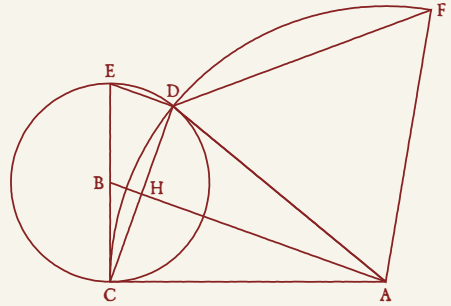



Figura 9

$D\hat{A}C = \frac{1}{45} 90^\circ = 2^\circ$

$\frac{AB}{CE} = \frac{AC}{CD}$

$CD > \frac{1}{30} AC$

$CE > \frac{1}{30} BA$

$\frac{1}{30} < \frac{CE}{BA} < \frac{2}{45}$

$0.03 \lesssim \frac{CE}{BA} \lesssim 0.04$

culo CDF, seja DF uma corda de comprimento igual ao raio AC. O ângulo reto EDC é igual ao ângulo reto BCA, enquanto o ângulo BAC é igual ao ângulo HCB. Então, os ângulos restantes DEC e HBC são iguais entre si. Logo, os triângulos CDE e ABC são semelhantes. Com isso temos que BA está para AC assim como EC está para CD; ou alternativamente AB está para CE assim como AC está para CD, ou ainda, DF para CD. Além disso, já que o ângulo DAC é $\frac{1}{45}$ do ângulo reto, o arco CD será $\frac{1}{180}$ da circunferência completa. Mas o arco DF é um sexto da circunferência completa.[23] Então, o arco CD equivale a $\frac{1}{30}$ do arco DF. O arco CD, sendo menor que DF, está para este em uma razão menor que a razão entre os segmentos de reta CD e DF. Assim sendo, o segmento CD é maior que $\frac{1}{30}$ do segmento DF. Mas DF é igual a AC. Então DC é maior que $\frac{1}{30}$ de CA e, com isso, CE é maior que $\frac{1}{30}$ de BA. Anteriormente havia sido demonstrado que é também menor que $\frac{2}{45}$ de BA.[24]

Proposição XII

$\frac{89}{90} = 0.9888\ldots$

O diâmetro do círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua é menor que o diâmetro da Lua, mas a razão entre eles é maior que a razão entre 89 e 90.

[23] Novamente, porque DF, sendo igual ao raio, vem a ser um dos lados de um hexágono regular inscrito.

[24] Note que $\sin 2^\circ = \frac{\pi}{90} \approx 0.0349$.

Seja A o nosso ponto de vista e B o centro da Lua (Fig. 10) quando o cone que compreende o Sol e a Lua tem seu vértice em nossos olhos. Trace-se o segmento AB. Um plano que contenha AB corta a esfera em um grande círculo e o cone em linhas retas. Seja a seção da esfera o círculo DEC e seja a seção do cone dada pelas linhas retas AD, AC e CD. Assim, CD é o diâmetro do círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua. Afirmo que CD é menor que o diâmetro da Lua, mas tem com este uma razão maior do que a razão entre 89 e 90. Que CD é menor que o diâmetro da Lua é evidente. Afirmo em seguida que a razão entre CD e o diâmetro da Lua é maior que a razão entre 89 e 90. Passando pelo ponto B, trace-se o diâmetro FG paralelamente a CD. Trace-se o segmento BC. Assim como anteriormente, DAC vale $\frac{1}{45}$ de um ângulo reto, e BAC vale $\frac{1}{90}$ de um ângulo reto. Mas o ângulo BAC é igual ao ângulo CBF; portanto o ângulo CBF também vale $\frac{1}{90}$ de um ângulo reto, ou seja $\frac{1}{90}$ do ângulo FBE. Então, temos que o arco CF mede $\frac{1}{90}$ do arco FCE. Resulta que o arco CE mede $\frac{1}{90}$ do arco FCE. Então a razão entre o arco CE e o arco ECF é igual à razão entre 89 e 90. Mas DEC é o dobro de CE, e GEF é o dobro de ECF. Então o arco DEC e o arco GEF também estão na proporção de 89 para 90. E

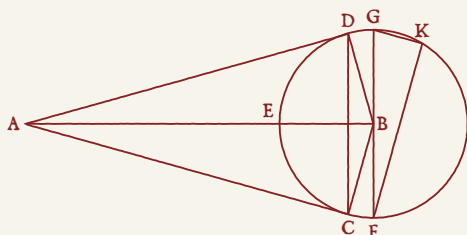



Figura 10

$B\hat{A}C = C\hat{B}F = 1^\circ$

$\frac{DC}{GF} < \frac{89}{90}$

a razão entre o segmento de reta DC e o segmento de reta GF é maior que a razão entre o arco DEC e o arco GF. Portanto, a razão entre o segmento de reta DC e o segmento de reta GF é maior que a razão entre 89 e 90.

Proposição XIII

Uma linha reta contida na sombra da Terra, e subentendendo um arco de círculo por onde se movem as extremidades do diâmetro que separa a parte clara da parte escura da Lua, é menor que o dobro do diâmetro da Lua, mas tem com ele uma razão maior do que a razão entre 88 e 45. Tal linha é também menor que $\frac{1}{9}$ *do diâmetro do Sol, mas tem com ele uma razão maior que a razão entre 22 e 225. A razão entre esta mesma linha e uma outra linha – traçada do centro do Sol perpendicularmente ao eixo e terminando nos lados do cone – é maior que a razão entre 979 e 10125.*

Seja A o centro do Sol, seja B o centro da Terra e seja C o centro da Lua no momento em que o eclipse[25] é total, quando a Lua se encontra inteiramente na sombra da Terra (Fig. 11).[26] Um plano que contenha ABC corta

[25] Eclipse lunar.

[26] Esta figura é problemática, conforme mencionam Berggren & Sidoli (2007), pois é impossível construir um diagrama que satisfaça as especificações do texto. Uma das soluções possíveis é desenhar a Lua com um pedaço fora da sombra da Terra. Esta é a abordagem do manuscrito Vat. Gr. 204.

Figura 11

$LX = LN$

$NX < 2\,LN$

$NX < 2\,LO$

$L\hat{X}N = C\hat{L}N$

$\frac{NX}{LN} = \frac{LN}{CL}$

$\frac{LN}{CL} > \frac{89}{45}$

$\left(\frac{LN}{CL}\right)^2 > \frac{7921}{2025}$

$LN > \frac{89}{90}\,LO$

$\left(\frac{NX}{LO}\right)^2 > \frac{89^2}{45^2}\,\frac{89^2}{90^2}$

$\frac{NX}{LO} > \frac{7921}{4050}$

$\frac{7921}{4050} \approx 1.9558$

$\frac{88}{45} = 1.9555\ldots$

$\frac{NX}{LO} > \frac{88}{45}$

as esferas em círculos, e corta em linhas retas o cone que compreende o Sol e a Terra. Sejam as esferas cortadas em grandes círculos DEF, GHK e LMN. Na sombra da Terra, o arco XLN é parte do círculo por onde se movem as extremidades do diâmetro que separa a parte iluminada[27] da parte escura da Lua. A seção do cone é dada pelas linhas DGX e FKN. Seja ABL o eixo. É evidente que o eixo ABL é tangente ao círculo LMN, pois a sombra da Terra tem a largura de duas Luas (Hipótese 5). É também evidente que o arco XLN é bisseccionado pelo eixo ABL, e que a Lua acaba de se inserir inteiramente na sombra da Terra. Tracem-se os segmentos XN, NL, LX e BN. Assim NL é o diâmetro do círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua. O segmento BN é tangente ao círculo LNOM, pois o ponto B corresponde ao nosso ponto de vista e LN é o diâmetro do círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua. Além disso, já que LX e LN são iguais, sua soma é o dobro de LN. Por isso, NX é menor que o dobro de LN. Tracem-se LC e CN, e prolongue-se LC até o ponto O. Assim NX é ainda menor que o dobro de LO. E já que CL é perpendicular a BL, então CL é paralelo a NX. Conseqüentemente, o ângulo LXN é igual ao ângulo CLN. Além disso, LN é igual a LX, e CL é igual a CN. Logo, o triângulo LNX é semelhante ao triângulo CLN.[28] Então temos que NX está para LN assim como LN está para CL. Mas a razão entre LN e CL é

[27] No caso, *face visível* e *face oculta.*

[28] E ambos são isósceles.

maior que a razão entre 89 e 45.[29] Ou seja, o quadrado de lado NX e o quadrado de lado LN terão uma razão maior que a razão entre 7921 e 2025. Então a razão entre os segmentos NX e LO é maior que a razão entre 7921 e 4050. Ora, a razão entre 7921 e 4050 é maior que a razão entre 88 e 45. Portanto, a razão entre NX e LO é maior que a razão entre 88 e 45. Assim, na sombra da Terra, a linha reta que subentende um arco de círculo por onde se movem as extremidades do diâmetro que separa a parte iluminada da parte escura da Lua será menor que o dobro do diâmetro da Lua, mas terá com relação a ele uma razão maior que a razão entre 88 e 45.

Tomando a mesma construção, tracemos agora o diâmetro PAR, passando pelo ponto A e perpendicular a AB. Afirmo que NX é menor que a nona parte do diâmetro do Sol, mas tem com ele uma razão maior que a razão entre 22 e 225; e ainda que a razão entre NX e PR será maior que a razão entre 979 e 10125. Já tendo sido demonstrado que NX é menor que o dobro do diâmetro da Lua, e que o diâmetro da Lua é menor que $\frac{1}{18}$ do diâmetro do Sol (Prop. IX), segue que NX será menor que $\frac{1}{9}$ do diâmetro do Sol. Além disso, a razão entre NX e o diâmetro da Lua é maior que a razão entre 88 e 45. E a razão entre o diâmetro da Lua e o diâmetro do Sol é maior que a razão entre 45 e 900, pois já que tal razão é maior que a razão entre 1 e 20, basta multiplicar por 45. Portanto, a razão entre NX e o diâmetro do Sol é maior que a razão entre 88 e 900, ou seja, entre 22 e 225.

$$\frac{22}{225} < \frac{NX}{2\,AY} < \frac{1}{9}$$

$$0.098 \lesssim \frac{NX}{2\,AY} \lesssim 0.111$$

[29] Pois já sabemos (Prop. XII) que $\frac{LN}{LO} > \frac{89}{90}$, e $LO = 2\,LC$.

Agora, tracemos a partir de B duas tangentes BYS e BVT que tocam o círculo DEF. Tracem-se também as linhas VY e AY. Teremos a seguinte proporção: o diâmetro do círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua está para o diâmetro da Lua assim como VY está para o diâmetro do Sol, pois o Sol e a Lua podem ser compreendidos por um cone com vértice em nossos olhos. Mas o diâmetro do círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua está para o diâmetro da Lua em uma razão maior que a razão entre 89 e 90. Então a razão entre VY e o diâmetro do Sol também é maior que a razão entre 89 e 90. Pelo mesmo motivo, resulta que a razão entre QY e AY é maior que a razão entre 89 e 90. Mas QY está para AY assim como AY está para AS, já que AS e QY são paralelos. Então a razão entre AY e AS é maior que a razão entre 89 e 90. Assim, a razão entre AY e AR é ainda maior que a razão entre 89 e 90, e o mesmo vale para os dobros destes segmentos. Logo, a razão entre o diâmetro do Sol e PR é maior que a razão entre 89 e 90. Já havia sido provado que a razão entre NX e o diâmetro do Sol é maior que a razão entre 22 e 225. Resulta que a razão entre NX e PR é maior que a razão entre o produto de 22 com 89 e o produto de 90 com 225. Ou seja, maior que a razão entre 1958 e 20250, ou tomando as metades, entre 979 e 10125.

$\frac{2\,AY}{PR} > \frac{89}{90}$

$\frac{NX}{2\,AY} > \frac{22}{225}$

$\frac{NX}{PR} > \frac{22}{225}\,\frac{89}{90}$

$\frac{NX}{PR} > \frac{979}{10125}$

$\frac{979}{10125} \approx 0.09669$

Proposição XIV

O segmento de reta que une o centro da Terra ao centro da Lua terá com um outro segmento – colinear, partindo do centro da Lua e interrompido pela linha que subentende a sombra da Terra – uma razão maior que a razão entre 675 e 1.

Consideremos a mesma configuração anterior, com o centro da Lua localizado sobre o eixo do cone que compreende o Sol e a Terra (Figs. 12a e 12b). Seja C o centro da Lua. Seja MOP um grande círculo na esfera da Lua, coplanar à figura. Trace-se a linha MO, que é o diâmetro do círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua. Tracem-se também as linhas BM, BO, LX, BX e CM. As linhas BM e BO tocam o círculo MOP, pois MO é o diâmetro do círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua. Já que LX é igual a MO – e ambos são iguais ao diâmetro do círculo que separa a parte iluminada da parte escura da Lua – resulta que o arco LMX é igual ao arco MLO. Conseqüentemente, o arco MX é igual ao arco LO. Mas LO é igual a LM; portanto MX é igual a LM. O segmento BX é igual ao segmento BL, pois o ponto B é o centro da Terra e o centro da órbita da Lua (Hipótese 2). E MPO está no mesmo plano. Portanto, BM é perpendicular a LX, e CM é perpendicular a BM. Então CM é paralelo a LX. Mas SX é paralelo a MR e, conseqüentemente, o triângulo LSX é semelhante ao triângulo CRM. Assim,

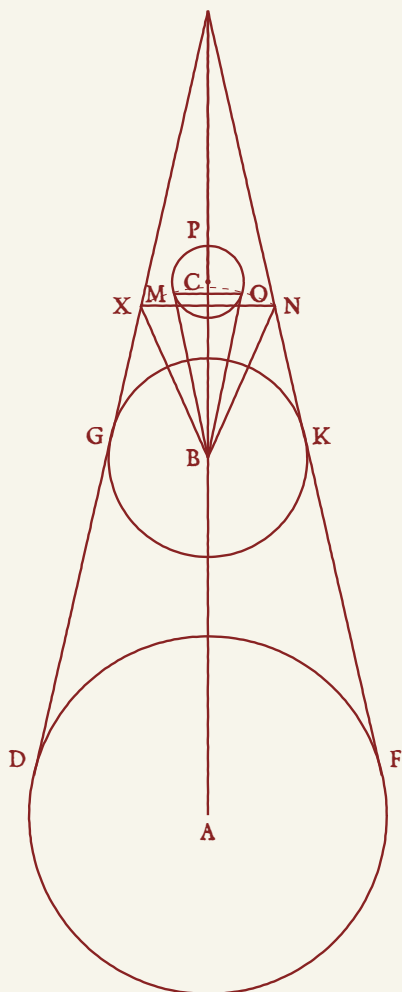



Figura 12a

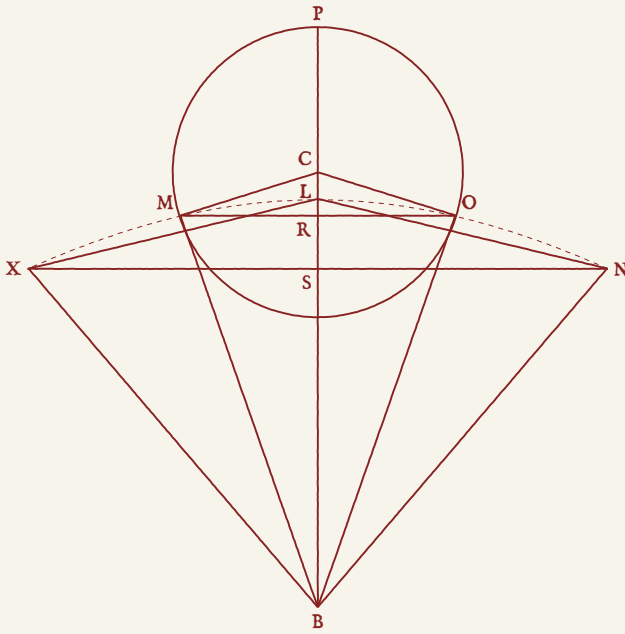
SX está para MR assim como LS está para CR. Mas SX é menor que o dobro de MR; portanto NX é menor que o dobro de MO, e também LS é menor que o dobro de CR. E RS é ainda menor que o dobro de CR. Resulta que CS é menor que o triplo de CR. Temos que a razão entre CR e CS é maior que a razão entre 1 e 3. Já que BC está para CM assim como CM está para CR, e já que a razão entre BC e CM é maior que a razão entre 45 e 1, resulta que a razão entre CM e CR é maior que a razão entre 45 e 1. E já que a razão entre CR e CS é maior que a razão entre 1 e 3, a razão entre CM e CS será maior que a razão entre 45 e 3, ou seja, entre 15 e 1. Já foi demonstrado que a razão entre BC e CM é maior que a razão entre 45 e 1. Resulta finalmente, da comparação entre estas proporções, que a razão entre BC e CS é maior que a razão entre 675 e 1.

P
C
L
M
O
R
X
N
S
B
$\frac{CR}{CS} > \frac{1}{3}$
$\frac{BC}{CM} = \frac{CM}{CR}$
$\frac{BC}{CM} > 45$
$\frac{CM}{CR} > 45$
$\frac{CM}{CS} > 15$
$\frac{BC}{CS} > 675$

Figura 12b

Proposição xv

A razão entre o diâmetro do Sol e o diâmetro da Terra é maior que a razão entre 19 e 3, mas menor que a razão entre 43 e 6.

$\frac{AM}{MR} > 9$

$AM - AR = MR$

$\frac{AM}{AM - AR} > 9$

$\frac{AM}{AR} < \frac{9}{8}$

$\frac{BR}{AB} < \frac{1}{18}$

$\frac{AB + BR}{BR} > 18 + 1$

$\frac{AR}{BR} > 19$

$\frac{AR}{AB} < \frac{19}{18}$

$\frac{AR}{AB} < \frac{19}{18}$

$\frac{AM}{AB} < \frac{19}{18}\,\frac{9}{8}$

$\frac{AM}{AB} < \frac{19}{16}$

$\frac{AM - BM}{AM} > \frac{16}{19}$

$\frac{AM}{BM} > \frac{19}{3}$

Seja A o centro do Sol, B o centro da Terra e C e centro da Lua quando o eclipse é total, de modo a garantir que A, B e C sejam colineares. Um plano que contém o eixo corta o Sol em um círculo DEF, a Terra em um círculo GHK, a sombra em um arco NX, e o cone nas linhas DM e FM. Trace-se a corda NX e, passando por A, trace-se OAP perpendicularmente a AM. Já que NX é menor que a nona parte do diâmetro do Sol, então a razão entre OP e NX é ainda maior que a razão entre 9 e 1. Logo, a razão entre AM e MR é maior que a razão entre 9 e 1. *Convertendo*, a razão entre AM e AR é menor que a razão entre 9 e 8. Além disso, AB é maior que 18 vezes BC e ainda maior que 18 vezes BR; logo, a razão entre AB e BR é maior que a razão entre 18 e 1. Inversamente, a razão entre BR e AB é menor que a razão entre 1 e 18. *Componendo*, a razão entre RA e AB resulta ser menor que a razão entre 19 e 18. Já foi demonstrado que a razão entre AM e AR é menor que a razão entre 9 e 8. Portanto, a razão entre AM e AB será menor que a razão entre 171 e 144, ou seja menor que a razão entre 19 e 16, pois as partes têm a mesma razão entre si que a razão entre um mesmo múltiplo das partes. *Convertendo*, a razão entre AM e BM é maior que a

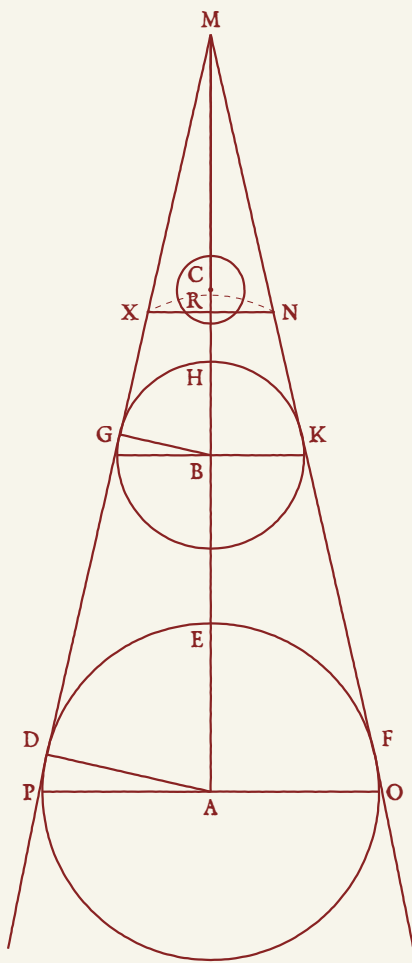



Figura 13

$$\frac{BC}{CR} > 675$$

$$\frac{BC}{BR} < \frac{675}{674}$$

$$\frac{AB}{BC} < 20$$

$$\frac{AB}{BR} < \frac{13500}{674}$$

$$\frac{AB}{BR} < \frac{6750}{337}$$

$$\frac{AR}{AB} > \frac{7087}{6750}$$

$$\frac{NX}{OP} > \frac{979}{10125}$$

$$\frac{OP}{NX} = \frac{AM}{MR}$$

$$\frac{AM}{MR} < \frac{10125}{979}$$

$$\frac{AM}{AR} > \frac{10125}{9146}$$

$$\frac{AR}{AB} > \frac{7087}{6750}$$

$$\frac{AM}{AB} > \frac{43}{37}$$

$$\frac{AM}{BM} < \frac{43}{6}$$

razão entre 19 e 3. Mas AM está para BM assim como o diâmetro do círculo DEF está para o diâmetro do círculo GHK. Assim, temos que a razão entre o diâmetro do Sol e o diâmetro da Terra é maior que a razão entre 19 e 3. Novamente, afirmo que tal razão será também menor que a razão entre 43 e 6. Já que a razão entre BC e CR é maior que a razão entre 675 e 1 (Prop. XIV), *convertendo* temos que a razão entre BC e BR será menor que a razão entre 675 e 674. Mas a razão entre AB e BC é menor que a razão entre 20 e 1 (Prop. VII). Comparando os termos iguais, teremos que a razão entre AB e BR é menor que a razão entre 13500 e 674, ou seja, entre 6750 e 337. *Convertendo* e *componendo*, resulta que a razão entre AR e AB é maior que a razão entre 7087 e 6750. Já que a razão entre NX e OP é maior que a razão entre 979 e 10125 (Prop. XIII), *convertendo*, a razão entre OP e NX é menor que a razão entre 10125 e 979. Mas OP está para NX assim como AM está para MR. Então a razão entre AM e MR é menor que a razão entre 10125 e 979. *Convertendo*, a razão entre AM e AR será maior que a razão entre 10125 e 9146. Mas a razão entre AR e AB é maior que a razão entre 7087 e 6750. Comparando as duas relações, resulta que a razão entre AM e AB é maior que a razão entre o produto de 10125 com 7087 e o produto de 9146 com 6750 – ou seja que a razão entre 71755875 e 61735500, que vem a ser maior que a razão entre 43 e 37. Portanto a razão entre AM e AB é maior que a razão entre 43 e 37. *Convertendo*, a razão entre AM e BM é menor que a razão entre 43 e 6. Mas

$\frac{19}{3} < \frac{AM}{BM} < \frac{43}{6}$

$6.333 \lesssim \frac{AM}{BM} \lesssim 7.167$

AM está para BM assim como o diâmetro do Sol está para o diâmetro da Terra. Conseqüentemente, a razão entre o diâmetro do Sol e o diâmetro da Terra é menor que a razão entre 43 e 6. Já havia sido provado que esta mesma razão é maior que a razão entre 19 e 3.

Proposição XVI

A razão entre os tamanhos[30] do Sol e da Terra é maior que a razão entre 6859 e 27, mas menor que a razão entre 79507 e 216.

Seja A o diâmetro do Sol e B o diâmetro da Terra (analogamente à Fig. 8). Já se sabe que o volume da esfera do Sol está para o volume da esfera da Terra assim como o cubo do diâmetro do Sol está para o cubo do diâmetro da Terra, assim como foi no caso do volume da Lua (Prop. x). Então o cubo de A está para o cubo de B assim como o Sol está para a Terra. A razão entre o cubo de A e o cubo de B resulta ser maior que a razão entre 6859 e 27, mas menor que a razão entre 79507 e 216, já que a razão entre A e B é maior que a razão entre 19 e 3, mas menor que a razão entre 43 e 6 (Prop. xv). Daí temos que a razão entre os tamanhos do Sol e a Terra é maior que a razão entre 6859 e 27, mas menor que a razão entre 79507 e 216.

$$\frac{19}{3} < \frac{A}{B} < \frac{43}{6}$$

$$\frac{6859}{27} < \left(\frac{A}{B}\right)^3 < \frac{79507}{216}$$

$$254 \lesssim \left(\frac{A}{B}\right)^3 \lesssim 368$$

[30] A razão entre os volumes.

Proposição XVII

A razão entre o diâmetro da Terra e o diâmetro da Lua é maior que a razão entre 108 e 43, mas menor que a razão entre 60 e 19.

$\frac{6}{43} < \frac{C}{A} < \frac{3}{19}$

$18 < \frac{A}{B} < 20$

$\frac{108}{43} < \frac{C}{B} < \frac{60}{19}$

$2.5 \lessapprox \frac{C}{B} \lessapprox 3.2$

Seja A o diâmetro do Sol, B o diâmetro da Lua e C o diâmetro da Terra. Já que a razão entre A e C é menor que a razão entre 43 e 6 (Prop. XV), então inversamente a razão entre C e A é maior que a razão entre 6 e 43. Mas a razão entre A e B é maior que a razão entre 18 e 1 (Prop. IX). Comparando as relações, temos que a razão entre C e B é maior que a razão entre 108 e 43. Já que a razão entre A e C é maior que a razão entre 19 e 3 (Prop. XV), então inversamente a razão entre C e A é menor que a razão entre 3 e 19. Mas a razão entre A e B é menor que a razão entre 20 e 1 (Prop. IX). Comparando as relações, temos que a razão entre C e B é menor que a razão entre 60 e 19.

Proposição XVIII

A razão entre os tamanhos[31] da Lua e da Terra é maior que a razão entre 1259712 e 79507, mas menor que a razão entre 216000 e 6859.

Seja A o diâmetro da Terra e B o diâmetro da Lua. A razão entre A e B é maior que a razão entre 108 e 43,

[31] A razão entre os volumes.

mas menor que a razão entre 60 e 19 (Prop. XVII). Então a razão entre o cubo de A e o cubo de B é maior que a razão entre 1259712 e 79507, mas menor que a razão entre 216000 e 6859. Mas o cubo de A está para o cubo de B assim como a Terra está para a Lua. Portanto, a razão entre os tamanhos da Lua e da Terra é maior que a razão entre 1259712 e 79507, mas menor que a razão entre 216000 e 6859.

$$\frac{108}{43} < \frac{A}{B} < \frac{60}{19}$$

$$16 \lesssim \left(\frac{A}{B}\right)^3 \lesssim 31$$

◑

Comentário de Pappus[32]

Em seu tratado sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua, Aristarco admite as seis hipóteses seguintes:

1. A Lua recebe sua luz do Sol.
2. A Terra pode ser considerada um ponto, e é o centro da órbita da Lua
3. Quando a Lua nos parece dicótoma, o grande círculo que separa a parte iluminada da parte escura está na direção de nossos olhos.
4. Quando a Lua nos parece dicótoma, sua separação do Sol é menor que um quadrante por um trigésimo de quadrante.
5. A largura da sombra da Terra equivale a duas Luas.
6. A Lua subentende a décima quinta parte de um signo do zodíaco.

[32] Pappus de Alexandria (século IV d.C.) foi um dos últimos astrônomos matemáticos da tradição helenística.

Destas hipóteses, a primeira, a terceira e a quarta estão quase inteiramente de acordo com as hipóteses de Hiparco e de Ptolomeu. De fato, a Lua está sempre iluminada pelo Sol, exceto durante eclipses,[33] quando ela deixa de receber luz, ao passar pela sombra da Terra. Esta sombra tem formato cônico e resulta da intercepção dos raios de luz do Sol pela Terra. Em seguida, o círculo que divide a Lua em duas partes – uma parte branca ou leitosa, que deve sua cor à luz do Sol, e outra parte que tem a cor cinzenta natural da Lua – é indistinguível de um grande círculo, quando sua posição relativa ao Sol faz com que a Lua nos apareça dicótoma. Isto ocorre quando a distância entre o Sol e a Lua é de aproximadamente um quadrante no círculo do zodíaco. E o mencionado círculo divisório está na direção dos nossos olhos, pois o plano determinado por ele interceptará nossos olhos, seja qual for a posição da Lua na primeira ou na segunda vez em que se apresenta dicótoma.[34]

No entanto, com relação às outras hipóteses, os matemáticos mencionados diferem de Aristarco. De acordo com eles, a Terra pode ser considerada um ponto e um centro não da esfera[35] por onde se move a Lua, mas da esfera das estrelas fixas. Ainda de acordo com aqueles matemáticos, a largura da sombra da Terra não é igual a duas Luas, e o diâmetro da Lua não subentende

[33] Eclipses lunares.
[34] Ou seja, nas fases de quarto crescente ou quarto minguante.
[35] Órbita da Lua.

a décima quita parte de um signo do zodíaco, ou seja, 2°. Segundo Hiparco, o círculo descrito pela Lua mede 650 vezes o diâmetro da Lua, e a largura da sombra da Terra equivale a $2\frac{1}{2}$ o tamanho da Lua, na sua distância média, nas conjunções. Por outro lado, segundo Ptolomeu, o diâmetro da Lua subentende um arco de 0° 31' 20" quando ela está em sua máxima distância, e 0° 35' 20" quando ela está em sua mínima distância.[36] Já o diâmetro da seção circular da sombra tem 0° 40' 40" quando a Lua está em sua máxima distância, e 0° 46' quando ela está em sua mínima distância.[37] Por estes motivos, os autores mencionados chegaram a resultados diferentes para as razões entre distâncias e tamanhos do Sol e da Lua.

$\frac{1}{650}\,360° \approx 0.554°$

$\approx 0°\,33'\,14''$

$\frac{0°\,40'\,40''}{0°\,31'\,20''} \approx 1.3$

Aristarco, depois de enumerar suas hipóteses, prossegue com uma passagem que cito literalmente: "Obtemos os seguintes resultados: A distância do Sol à Terra é maior que dezoito – mas menor que vinte – vezes a distância da Lua à Terra; isto decorre da posição da Lua no momento da dicotomia. O diâmetro do Sol e o diâmetro da Lua têm a mesma razão mencionada anteriormente. A razão entre o diâmetro do Sol e o diâmetro

[36] De fato, os valores de Hiparco e de Ptolomeu para o tamanho angular da Lua são muito mais acurados.

[37] Aqui, Pappus deve estar referindo-se à metade do diâmetro do cone, pois Ptolomeu no *Almagesto* dá o valor de $2\frac{3}{5} = 2.6$ para a razão entre a largura da sombra da Terra e o diâmetro da Lua na máxima distância. Estes valores de Hiparco e Ptolomeu para o tamanho da sombra também são mais acurados que o valor de Aristarco.

da Terra é maior do que a razão entre 19 e 3, mas menor do que a razão entre 43 e 6; isto decorre da razão deduzida entre as distâncias, da hipótese sobre a sombra, e da hipótese sobre o tamanho angular da Lua." Daí entende-se que ele passará em seguida a demonstrar cada um destes resultados, empregando lemas preliminares necessários às demonstrações. Como resultados gerais de toda esta investigação, Aristarco conclui que:

1. A razão entre os tamanhos[38] do Sol e da Terra é maior que a razão entre 6859 e 27, mas menor que a razão entre 79507 e 216.

2. A razão entre o diâmetro da Terra e o diâmetro da Lua é maior que a razão entre 108 e 43, mas menor que a razão entre 60 e 19.

3. A razão entre os tamanhos da Lua e da Terra é maior que a razão entre 1259712 e 79507, mas menor que a razão entre 216000 e 6859.

Mas Ptolomeu demonstrou no quinto livro da *Syntaxis*[39] que se o raio da Terra for tomado como unidade, então a máxima distância da Lua na conjunção é de $64\frac{10}{60}$ unidades, a máxima distância do Sol é de 1210 unidades, o raio da Lua é $\frac{17}{60}\frac{33}{3660}$ unidades, e o raio do

[38] Volumes.

[39] *Syntaxis Mathematica* é o título grego convencionalmente adotado para a obra de Ptolomeu que ficou posteriormente conhecida como *Almagesto*.

Sol é $5\frac{30}{60}$ unidades.[40] Conseqüentemente, se o diâmetro da Lua for tomado por unidade, o diâmetro da Terra vale $3\frac{2}{5}$ unidades, e o diâmetro do Sol vale $18\frac{4}{5}$ unidades. Ou seja, o diâmetro da Terra é $3\frac{2}{5}$ vezes maior que o diâmetro da Lua. O diâmetro do Sol é $18\frac{4}{5}$ vezes maior que o diâmetro da Lua, ou ainda $5\frac{1}{2}$ vezes maior que o diâmetro da Terra.

A partir destes números, é simples obter as razões entre os conteúdos sólidos, visto que o cubo de 1 é 1 unidade, o cubo de $3\frac{2}{5}$ é aproximadamente $39\frac{1}{4}$, e o cubo de $18\frac{4}{5}$ é aproximadamente $6644\frac{1}{2}$. Daí concluímos que se o tamanho sólido da Lua for tomado como unidade, a Terra contém $39\frac{1}{4}$ unidades, e o Sol contém $6644\frac{1}{2}$ unidades. Portanto, o Sol é cerca de 170 vezes maior que a Terra.

◐

[40] Os valores de Ptolomeu são bastante próximos dos valores corretos, para o caso da Lua. Para o Sol, estão subestimadas por um fator $\sim$20.

Apêndice

Vamos discutir brevemente os seguintes aspectos do tratado de Aristarco: a concepção do problema, os dados observacionais, os métodos matemáticos da solução e os resultados numéricos. Em seguida, usando notação matemática moderna, vamos recapitular os desenvolvimentos principais e comparar cada resultado com os valores atualmente conhecidos. Concluiremos mencionando algumas correções de ordem superior.

1 Discussão

Concepção do problema

Do ponto de vista astronômico, parece-nos atualmente que o principal mérito desta obra talvez seja a formulação do problema, ou seja, sua modelagem teórica. Apesar dos erros introduzidos pela inacurácia dos dados observacionais, as configurações geométricas utilizadas são plenamente satisfatórias, pois se baseiam em suposições válidas e em aproximações geralmente razoáveis. Assim, é possível substituir valores atuais para

as grandezas observáveis e obter resultados essencialmente corretos. Não se faz referência alguma ao heliocentrismo e não há discussão sobre a estrutura do mundo. Que a linguagem esteja em termos de um referencial geocêntrico não traz conseqüências aos cálculos. Por exemplo, a Prop. VI mostra que a esfera da Lua é inferior à esfera do Sol, mas isto significa estritamente que o Sol precisa estar mais afastado que a Lua.

O tratado começa enunciando formalmente as *hipóteses*. A primeira é de natureza física, e afirma que a Lua é iluminada pelo Sol. A segunda equivale a dizer que o raio da Terra é muito menor que a órbita da Lua (de fato é menor que 2%); ou seja, pode-se considerar que ângulos medidos a partir da superfície da Terra coincidem com ângulos medidos a partir do centro da Terra. A terceira hipótese estabelece que quando a Lua está na fase de quarto crescente ou quarto minguante (*dicotomia*), o triângulo Terra-Lua-Sol é reto na Lua, já que a linha que vemos separando a parte clara da parte escura é perpendicular à linha Sol-Lua. As hipóteses seguintes dão valores numéricos de grandezas observáveis. Os triângulos da configuração de eclipse da Lua não são explicitamente descritos nas hipóteses, mas a Hip. 5 se refere ao tamanho da sombra da Terra à distância da órbita lunar.

Em certas passagens, o tratado lida com o círculo que divide a parte iluminada e a parte escura da Lua, tomando o cuidado de notar que a porção iluminada seria estritamente maior que um hemisfério. Embora

formalmente correta do ponto de vista geométrico, esta distinção é irrelevante. Podemos sempre supor que o diâmetro deste círculo é uma corda que coincide com o diâmetro da Lua.

Dados observacionais

Efetivamente, existem apenas três dados observacionais quantitativos no tratado, e cada um deles é enunciado na forma de uma hipótese. São eles: o ângulo entre o Sol e a Lua (chamado de *elongação*) na fase de quarto minguante ou quarto crescente (87°, Hip. 4); a largura da sombra da Terra à distância da órbita lunar (2 diâmetros da Lua, Hip. 5); e o diâmetro angular da Lua (2°, Hip. 6). Que o diâmetro angular do Sol é igual ao da Lua é demonstrado na Prop. VIII e podemos dizer que decorre de observações qualitativas de eclipses solares totais.

Destas grandezas, sabemos que o ângulo 87° está levemente subestimado e são compreensíveis as dificuldades práticas de medir tal separação angular naquela época. Veremos a seguir como este pequeno erro se propaga enormemente nas razões de distâncias. Tendo em vista que a elongação da Lua varia 1° em apenas 2 horas, seria também necessário determinar cuidadosamente o instante exato da dicotomia. Já a largura da sombra da Terra tem um valor bastante aceitável no tratado. Concebivelmente, a largura de 2 Luas poderia ter sido estimada medindo a duração de um eclipse lunar total, sem grande dificuldade. De fato, Pappus

menciona que Hiparco e Ptolomeu obtiveram valores ainda melhores. Finalmente, o surpreendente erro no tamanho angular da Lua (2° é o quádruplo do valor correto) é o mais intrigante, especialmente porque Arquimedes e outros atribuem ao próprio Aristarco a descoberta de que o Sol subentende $\frac{1}{720}$ do círculo do zodíaco, ou seja, meio grau.

O inacurado valor de 2° para o diâmetro angular da Lua também introduz uma notória inconsistência com relação à duração dos eclipses. O mês sideral (i.e. o período orbital da Lua) é de cerca de 27 dias e é conhecido desde tempos remotos. Daí resulta que a Lua se move no céu com uma velocidade angular aparente de 360° a cada 27 dias, ou cerca de *meio grau por hora*, com relação às estrelas fixas. Já o movimento diário Sol é bem mais lento, pois ele percorre 360° em 365 dias, ou menos de um grau por dia. Então na escala de algumas horas, podemos considerar o Sol aproximadamente imóvel com relação às estrelas fixas. Se a largura da sombra da Terra mede cerca de 2 diâmetros da Lua, então em um eclipse lunar total, a Lua precisa percorrer 3 diâmetros lunares, desde o primeiro contato com o cone de sombra até emergir inteiramente do outro lado. Ora, se o diâmetro da Lua fosse 2°, o eclipse duraria 12 horas, o que é evidentemente absurdo.

Tannery (1883) oferece algumas especulações curiosas. A respeito do ângulo de 87°, ele afirma não acreditar que este número seja proveniente de uma medição direta através de instrumentos. Ele conjectura que

tal valor tenha sido inferido por vias indiretas ou até adotado por outros motivos. Tannery suspeita que talvez Aristarco estivesse primariamente interessado em demonstrar a viabilidade do método, e não necessariamente em chegar ao melhor resultado numérico possível. Neugebauer (1975) também acha mais plausível que os valores supostamente observáveis tenham sido simplesmente escolhidos por mera conveniência aritmética, já que dados reais introduziriam ainda mais complexidade ao método. De qualquer modo, o tratado demonstra, em princípio, a eficácia da abordagem matemática na solução de problemas astronômicos.

Métodos matemáticos

No século III a.c, antes do desenvolvimento da trigonometria, Aristarco não dispunha de métodos gerais para para calcular senos e cossenos de um ângulo qualquer. Além disso, não havia sequer uma estimativa numérica tolerável para o valor de π. Por estes motivos, sua abordagem precisava ser puramente geométrica. Por outro lado, Aristarco emprega em certas passagens um resultado não-evidente, que em linguagem moderna seria equivalente às seguintes desigualdades:

$$\frac{\sin\ \alpha}{\sin\ \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan\ \alpha}{\tan\ \beta},$$

onde $0^\circ < \beta < \alpha < 90^\circ$. Aristarco não demonstra nem sequer enuncia explicitamente estas relações, presumivelmente por supor que seus leitores já estariam fami-

liarizados com tal resultado. De fato, Heath (1913) nota que Arquimedes tacitamente também as supõe conhecidas. Para Aristarco, casos particulares destas desigualdades – formuladas em termos de razões entre segmentos de reta e razões entre comprimentos de arcos – são úteis para calcular intervalos numéricos e assim restringir o valor de certos cossenos em um dado problema, por exemplo. De fato, o objetivo da Prop. VII é essencialmente calcular uma estimativa numérica para $\cos 87^\circ$. Similarmente, a Prop. XI se resumiria a calcular $\sin 2^\circ$. É claro que os procedimentos puramente geométricos são muito mais trabalhosos e exigem considerável engenhosidade.

Resultados numéricos

Sabemos que os resultados numéricos serão inevitavelmente errôneos, devido à inacurácia dos dados observacionais. A Tabela A1 apresenta uma comparação aproximada entre as principais estimativas de Aristarco e os valores atuais. Nas seções seguintes, vamos comparar passo a passo cada resultado do tratado, empregando consistentemente os dados de Aristarco, para em seguida compará-los com os equivalentes modernos. Para isso, adotamos os valores médios da Tabela A2 para as distâncias e os tamanhos em questão.

O tratado termina apresentando *razões* entre todas as grandezas, mas sem oferecer comprimentos absolutos. Em última análise, veremos que as distâncias e os raios do Sol e da Lua podem ser todos expressos em ter-

	Aristarco	atual
distância do Sol / distância da Lua	19	389
raio do Sol / raio da Terra	6.7	109
raio da Terra / raio da Lua	2.8	3.7

Tabela A1

	valores médios atuais
raio do Sol	695 700 km
raio da Lua	1 740 km
raio da Terra	6 370 km
distância Terra-Sol	149 600 000 km
distância Terra-Lua	384 400 km

Tabela A2

mos do raio da Terra. No entanto, não há menção sobre o valor numérico do raio da Terra em unidades físicas de comprimento. Eratóstenes, aproximadamente contemporâneo de Aristarco, determinou a circunferência da Terra em unidades absolutas como sendo 250 000 *estádios*. Há alguma confusão causada pela existência de distintas unidades que levavam este nome no mundo antigo. Dreyer (1953) afirma que, lendo Plínio, é possível concluir que 1 estádio em questão deve corresponder a 300 cúbitos ou 157.5 m, de modo que o raio da Terra resultaria ser $\sim$6980 km. Pappus, no seu comentário que data de quase seis séculos mais tarde, mantém a mesma abordagem de Aristarco e limita-se a fornecer

alguns resultados mais recentes de Hiparco ou Ptolomeu, mas sem mencionar Eratóstenes.

2 Determinação das distâncias

Com notação trigonométrica, vamos re-expressar o método de Aristarco para a determinação da razão entre as distâncias do Sol e da Lua.

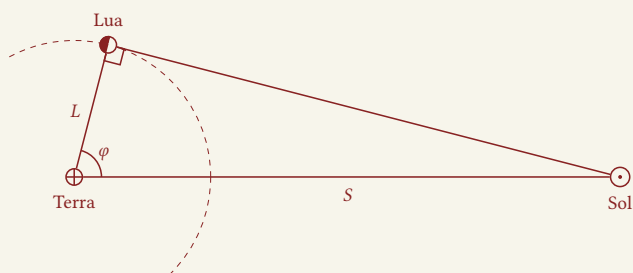



Figura A1

Para determinar tal razão, a construção geométrica é dada pela Fig. A1, sendo que a formulação e o dado observacional provêm das Hipóteses 3 e 4. A Lua nos parece iluminada pela metade quando está nas fases de quarto crescente ou quarto minguante. Nestes momentos, o triângulo Terra-Lua-Sol tem ângulo reto na Lua. Um observador na Terra medirá uma separação angular φ entre a Lua e o Sol. Ocorre que este triângulo é muito agudo. Em outras palavras: vista a partir do Sol, a distância Terra-Lua subentenderia um ângulo muito

pequeno. Conseqüentemente, o ângulo φ é bastante próximo de 90°. Aristarco oferece $\varphi = 87^\circ$ no tratado. A razão entre as distâncias da Lua (L) e do Sol (S) é então dada simplesmente por:

$$\cos\varphi = \frac{L}{S}. \tag{1}$$

É notável para o leitor moderno que o enunciado deste deste problema se limite a um triângulo retângulo e a solução, a um cosseno. Lembramos que Aristarco não dispunha das ferramentas matemáticas que nos são elementares, pois naquela época a trigonometria ainda não tinha sido inventada. Aristarco, depois de demonstrar seis proposições geométricas que garantem que o problema esteja bem colocado, chega à Prop. VII, cujo objetivo é calcular numericamente o cosseno deste ângulo. Com métodos geométricos, ele é capaz de limitar o resultado a um intervalo cujo valor central é:

$$\cos 87^\circ \approx \frac{1}{19}, \tag{2}$$

uma excelente aproximação.

A fonte principal de erro neste caso não é a estimativa numérica do cosseno, mas sim a má qualidade do suposto dado observacional, i.e. a elongação da Lua $\varphi = 87^\circ$. Considerando as dificuldades práticas envolvidas na tentativa de se efetuar tal medição na antigüidade, este valor parece bastante próximo do valor correto ($\sim 89^\circ$ 51' 10"). Infelizmente, ocorre que este erro

aparentemente pequeno traduz-se em um erro de um fator ∼20 na razão das distâncias, já que:

$$\cos 89^\circ\ 51'\ 10'' \approx \frac{1}{389}. \tag{3}$$

É fácil constatar que a função sec φ varia intensamente na proximidade de 90°.

A seguir, vamos determinar os tamanhos do Sol e da Lua em função do raio da Terra. Ao final, poderemos voltar e re-expressar as distâncias também em unidades terrestres.

3 Determinação dos tamanhos

Utilizando a construção que mostra o momento de um eclipse lunar (Fig. A2), vamos essencialmente utilizar duas semelhanças de triângulos e, com isso, obter o raio do Sol e o raio da Lua – expressos em termos do raio da Terra.

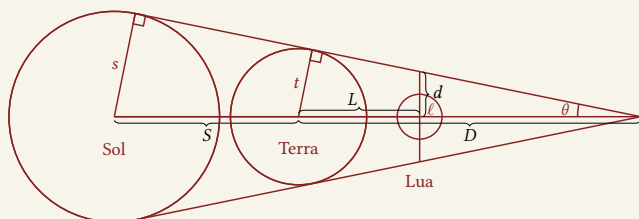



Figura A2

Empregando notação similar à de Tannery (1883), definimos:

$$
\begin{aligned}
s &= \text{raio do Sol} \\
t &= \text{raio da Terra} \\
\ell &= \text{raio da Lua} \\
S &= \text{distância da Terra ao Sol} \\
L &= \text{distância da Terra à Lua} \\
\theta &= \text{semi-abertura do cone de sombra da Terra} \\
d &= \text{raio da sombra da Terra, na distância da Lua} \\
D &= \text{distância do centro da Terra ao vértice do cone}
\end{aligned}
$$

Os dois triângulos semelhantes que têm como catetos menores respectivamente o raio do Sol e o raio da Terra nos fornecem:

$$\sin\theta = \frac{s}{S+D} \tag{4}$$

$$\sin\theta = \frac{t}{D} \tag{5}$$

e conseqüentemente:

$$\frac{D}{S} = \frac{t}{s-t}. \tag{6}$$

Além disso, do triângulo que tem como cateto menor o lado d, temos:

$$\tan\theta = \frac{d}{D-L} \tag{7}$$

Aqui vamos supor que o ângulo θ é muito pequeno e que portanto a aproximação $\sin\ \theta \approx \tan\ \theta$ é válida.[41] Neste caso, podemos combinar as equações 5 e 7, resultando em:

$$\frac{D}{L} = \frac{t}{t-d} \tag{8}$$

Agora basta dividir as equações 6 e 8 para eliminar D:

$$\frac{L}{S} = \frac{\ell}{s} = \frac{t-d}{s-t} \tag{9}$$

notando que $\frac{s}{S} = \frac{\ell}{L}$, pois os diâmetros angulares do Sol e da Lua são (aproximadamente) iguais. Usando a equação 9, podemos isolar primeiro o termo $\frac{s}{t}$ e, em seguida, o termo $\frac{\ell}{t}$:

$$\frac{s}{t} = \frac{1 + s/\ell}{1 + d/\ell}$$

$$\frac{\ell}{t} = \frac{1 + \ell/s}{1 + d/\ell}$$

[41] Em retrospecto, já sabemos que este ângulo é essencialmente meio diâmetro angular so Sol, i.e. a razão entre o raio do Sol e a unidade astronômica. De fato, eliminando D das equações 4 e 5, resulta que:

$$\sin\ \theta = \frac{s-t}{S} \approx \frac{s}{S}$$

e também já sabemos – com valores modernos – que o raio da Terra é muito menor que o raio do Sol. Portanto, sabendo que $\theta \approx 0.0046$ rad, temos que o seno e a tangente deste ângulo diferem entre si por menos de 0.001% e a aproximação usual $\theta \approx \sin\ \theta \approx \tan\ \theta$ é plenamente justificada. Mesmo com os valores de Aristarco, a aproximação também é válida.

Note que temos aqui o raio da Lua e o raio do Sol (expressos em termos do raio da Terra) em função de duas quantidades que podem em princípio ser determinadas: a razão entre os raios do Sol e da Lua (ou entre suas distâncias, medindo cos φ), e a razão entre o raio da sombra da Terra e o raio da Lua. Definindo $n = \frac{d}{\ell}$ e $x = \frac{s}{\ell}$, ficamos com uma notação ainda mais simples:

$$\frac{s}{t} = \frac{1+x}{1+n} \tag{10}$$

$$\frac{\ell}{t} = \frac{1}{x}\frac{1+x}{1+n} \tag{11}$$

Agora vamos inserir os valores de Aristarco. Ora, que a largura da sombra da Terra é equivalente a duas luas é uma é uma das hipóteses do tratado (Hip. 5); portanto $n = 2$. A razão entre as distâncias do Sol e da Lua já havia sido previamente limitada ao intervalo entre 18 e 20. Vamos tomar o valor central $x = 19$. Portanto, para Aristarco, os raios do Sol e da Lua em unidades terrestres resultam ser:

$$\frac{s}{t} = \frac{1+19}{1+2} \approx 6.666...$$

$$\frac{\ell}{t} = \frac{1}{19}\frac{1+19}{1+3} \approx 0.35$$

Com os valores modernos, de cerca de $n = 2.64$ e $x = 389$, as razões corretas entre as distâncias são:[42]

$$\frac{s}{t} \approx 107$$
$$\frac{\ell}{t} \approx 0.27$$

Já sabemos que a estimativa antiga de x estava errada por um fator $\sim$20 e, por isso, o raio do Sol também resulta estar bastante subestimado no tratado. Por outro lado, vemos que o resultado para o raio da Lua – grosseiramente um terço do raio da Terra – é bastante tolerável. Re-escrevendo a equação 11 na forma

$$\frac{\ell}{t} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{x}\right), \tag{12}$$

fica fácil ver que a dependência com n é mais importante, já que $\frac{1}{x}$ é um número pequeno. Assim, o grande erro em x influi relativamente pouco; ao mesmo tempo, $n = 2$ é suficientemente próximo do valor atual.

Finalmente, podemos expressar as distâncias em termos do raio da Terra. Aqui precisamos usar o diâmetro angular do Sol (ou da Lua, supondo-os aproximadamente iguais). Chamando este diâmetro angular de δ e

[42] Note que o valor atual um pouco mais acurado seria $\frac{s}{t} = 109$ com os dados da Tabela A2. A pequena discrepância decorre de adotarmos a igualdade $\frac{s}{S} = \frac{\ell}{L}$ no método empregado. Como os diâmetros angulares médios do Sol e da Lua não são exatamente iguais na realidade, a razão entre as distâncias ($\frac{S}{L} \approx 389.2$) não é idêntica à razão entre os raios ($\frac{s}{l} \approx 399.8$).

supondo que $\sin\delta \approx \delta$ em radianos, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{s}{S} &= \frac{\delta}{2} \\ \frac{\ell}{L} &= \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

Basta dividir estas equações por t,

$$\frac{S}{t} = \frac{2}{\delta}\left(\frac{s}{t}\right) \tag{13}$$

$$\frac{L}{t} = \frac{2}{\delta}\left(\frac{\ell}{t}\right) \tag{14}$$

e notar que os termos entre parênteses já estão dados pelas equações 10 e 11. O tamanho angular da Lua é uma das hipóteses do tratado (Hip. 6): $\delta = 2^\circ \approx 0.035$ (e é aproximadamente o quádruplo do valor real). Daí resulta que para Aristarco:

$$\begin{aligned} \frac{S}{t} &\approx 382 \\ \frac{L}{t} &\approx 20 \end{aligned}$$

Com valores atuais, teríamos:[43]

$$\frac{S}{t} \approx 24\,500$$

$$\frac{L}{t} \approx 63$$

Constatamos que a distância da Terra ao Sol em unidades do raio da Terra é a grandeza com o resultado numérico mais discrepante. Isto ocorre porque esta razão combina o erro em $\frac{s}{t}$, que é dominado pelo erro de x, com o erro adicional em δ, que também é importante. Como um todo, os resultados numéricos globalmente fazem os tamanhos e as distâncias parecerem menores do que são na realidade. A exceção é o tamanho da Lua, que é levemente superestimado, além de ser o resultado mais acurado.

4 Correções de ordem superior

As distâncias apresentadas na Tabela A2 são os valores médios. Embora as diferenças sejam relativamente pequenas, vamos mencionar brevemente como a variação daquelas distâncias afeta as grandezas discutidas anteriormente.

[43] Por consistência, continuamos usando a aproximação de que os tamanhos angulares da Lua e do Sol são iguais ($\delta = 0.5^\circ \approx 0.0087$); um pouco mais acuradamente, ficaríamos com cerca de 23 500 e 61, respectivamente.

Elongação da Lua na fase de quarto minguante (φ)

O valor verdadeiro de φ sofre variações ao longo do ano, pois nem a distância Terra-Lua nem a distância Terra-Sol são estritamente constantes. Devido às órbitas elípticas (i.e. considerando as máximas e mínimas distâncias possíveis da Lua, bem como as do Sol), φ pode em princípio variar cerca de 40" ao redor do valor médio, sendo que a contribuição proveniente da elipticidade da órbita lunar é pelo menos três vezes mais importante que a da órbita da Terra.

Largura da sombra da Terra (n)

A rigor, o valor citado de $n = 2.64$ para a largura da sombra da Terra em diâmetros lunares também deve ser entendido como um valor médio, devido à elipticidade das órbitas da Lua e da Terra. Tanto a sombra da Terra quanto a distância Terra-Lua variam. Aqui também, a maior contribuição vem da excentricidade da órbita lunar. O valor mínimo ($n \approx 2.57$) ocorre quando a Terra está no periélio e a Lua está no apogeu; o valor máximo ($n \approx 2.72$) ocorre quando a Terra está no afélio e a Lua no perigeu. Por completeza, mencionemos que a distância média da Terra ao vértice do cone de sombra é de aproximadamente $D = 1\,382\,000$ km, ou seja, pouco menos de 1% da unidade astronômica.

Excentricidade da órbita lunar

A excentricidade da órbita da Terra ao redor do Sol é relativamente baixa ($\varepsilon = 0.0167$), se comparada com a excentricidade da órbita da Lua ao redor da Terra ($\varepsilon = 0.0549$). Lembremos que no problema de Kepler, a excentricidade é dada por:

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

onde a e b são respectivamente o semi-eixo maior e o semi-eixo menor da elipse. As distâncias mínima e máxima entre os dois corpos (chamadas de *ápsides*) são dadas pelas equações:

$$\begin{aligned} r_{\text{min}} &= a\,(1 - \varepsilon) \\ r_{\text{max}} &= a\,(1 + \varepsilon), \end{aligned}$$

com as quais podemos calcular as distâncias extremas da Lua (quando esta está no perigeu ou no apogeu) e as distâncias extremas do Sol (quando a Terra está no periélio ou no afélio). Note que a também é igual à distância média entre os dois corpos.

Estritamente, $\varepsilon = 0.0549$ é um valor médio, pois a excentricidade da órbita da Lua está, ela própria, sujeita a oscilações induzidas pela perturbação gravitacional do Sol, com período de cerca de meio ano. As excentricidades máximas ocorrem quando o semi-eixo maior da órbita lunar aponta na direção do Sol; nesta situação, a excentricidade pode alcançar 0.0775. Já a excentricidade mínima ocorre quando o semi-eixo maior da

órbita lunar está perpendicular à direção do Sol; neste caso a excentricidade pode chegar a 0.0255. Como resultado, a distância da Lua nos instantes de perigeu ou apogeu também oscila. Ou seja, em configurações de máxima excentricidade, temos um apogeu mais afastado que o apogeu médio e um perigeu mais próximo que o perigeu médio, por exemplo. Os perigeus da Lua oscilam entre 356 400 km e 370 400 km; já os apogeus variam de 404 000 km a 406 700 km, aproximadamente. Assim sendo, a diferença entre o menor dos perigeus e o maior dos apogeus corresponde a cerca de 13% da distância média entre a Terra e a Lua.

Diâmetros angulares e eclipse anular

Como conseqüência das notáveis variações da complexa órbita lunar, o diâmetro angular da Lua varia de 29.4' a 33.6', aproximadamente. Por outro lado, o diâmetro angular do Sol varia entre cerca de 31.4' e 32.5', viabilizando a ocorrência de eventuais eclipses anulares.

Aristarco argumenta que os tamanhos angulares da Lua e do Sol são os mesmos (Prop. VIII), já que nos eclipses solares totais a Lua oculta o Sol exatamente. Na realidade, sabemos que também existem eclipses anulares, nos quais as bordas do Sol ficam expostas, apesar de a Lua e o Sol estarem alinhados. Aristarco aparenta ignorar a existência deste tipo de fenômeno. Heath (1913) menciona que o mais antigo registro que se tem sobre um eclipse anular data do segundo século d.C. Não é inteiramente impossível que Aristarco ti-

vesse testemunhado um eclipse anular do Sol, ou ao menos obtido um relato. Não se sabe essencialmente nada sobre a vida de Aristarco. Ptolomeu menciona no *Almagesto* que Aristarco teria observado o solstício de verão de 281 a.C., presumivelmente em Alexandria (Dreyer, 1953). Durante seu suposto tempo de vida (cerca de 310 a.C – 230 a.C.), houve ao menos 7 eclipses *anulares* visíveis da região do Mediterrâneo como um todo. No entanto, estando-se fora de uma estreita faixa de visibilidade, o eclipse anular perde seu caráter peculiar e é visto apenas como mais um eclipse parcial. Por exemplo, a ilha de Samos não fez parte da zona de visibilidade de nenhum destes 7 eclipses. A melhor oportunidade teria sido o eclipse anular de 262 a.C., cuja sombra passou por boa parte da atual Grécia, quase incluindo Atenas, e também teria sido visível marginalmente de Bizâncio (atual Istambul), ao pôr do Sol. Já em 233 a.C., outro eclipse anular passou pelo Egito, com a faixa de visibilidade incluindo Alexandria, mas esta data é muito próxima da suposta data de morte de Aristarco. No período em questão, outros 5 eclipses anulares poderiam ter sido observados no norte do Egito (316 a.C.), sul do Egito (306 a.C.), península Ibérica (296 a.C.), Chipre e norte do Egito (251 a.C.), e nas atuais Beirute e Benghazi (241 a.C.).

◑

Bibliografia

Aristarchos, *Über die Grössen und Entfernungen der Sonne und des Mondes*, Trad. A. Nokk, Freiburg, 1854

Aristarco de Samos, *Sobre los tamaños y las distancias del sol y la luna*, Trad. María Rosa Massa Esteve, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 2007

Aristarque de Samos, *Traité d'Aristarque de Samos sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune*, Trad. Comte de Fortia d'Urban, Paris, 1823

Berggren J. L., Sidoli N., 2007, *Aristarchus's On the Sizes and Distances of the Sun and the Moon: Greek and Arabic Texts*, Arch. Hist. Exact Sci., 61, 213

Commandino F., 1572, *Aristarchi De magnitudinibus, et distantiis solis, et lunae, liber cum Pappi Alexandrini explicationibus quibusdam. A Federico Commandino in Latinum conuersus, ac commentarijs illustratus*, Pesaro

Dreyer J. L. E., 1953, *A History of Astronomy from Thales to Kepler*, Dover, New York

Espenak F., Meeus J., 2006, *Five Millennium Canon of Solar Eclipses: -1999 to +3000*, NASA Technical Publication TP-2006-214141

Heath T., 1913, *Aristarchus of Samos: The Ancient Copernicus*, Oxford University Press

Heath T., 1921, *A History of Greek Mathematics*, vol. II, Oxford University Press

Lopes M. H. O., 2001, *A retrogradação dos planetas e suas explicações: os orbes dos planetas e seus movimentos, da Antigüidade a Copérnico*, Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo

Neugebauer O., 1942, *Archimedes and Aristarchus*, Isis, 34, 4

Neugebauer O., 1975, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

Noack B., 1992, *Aristarch von Samos: Untersuchungen zur Überlieferungsgeschichte der Schrift Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης*, Reichert Verlag, Wiesbaden

Panchenko D., 2001, *Aristarchus of Samos on the apparent sizes of the sun and moon*, Antike Naturwissenschaft und ihre Rezeption, 11, 23

Roncoli R. B., 2005, *Lunar Constants and Models Document*, JPL Technical Document D-32296

Tannery P., 1883, *Aristarque de Samos*, Mémoires de la Societé des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, 2^e série, Tome V, ed. Gauthier-Villars, Paris

Wall B. E., 1975, *The Historiography of Aristarchos of Samos*, Studies in the History and Philosophy of Science, 6, 201

Wallis J., 1688, *Aristarchi Samii de magnitudinibus & distantiis solis & lunæ, liber. Nunc primum Græce editus cum Federici Commandini versione Latina, notisque illius & editoris*, Oxford

Aristarco de Samos, no terceiro século a.C., desenvolveu um método para calcular os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua. O tratado é composto integralmente de demonstrações geométricas, pois Aristarco ainda não dispunha de trigonometria. Nesta edição, a tradução do texto integral em língua portuguesa é acompanhada de um apêndice que resume os principais resultados usando notação matemática atual.